Автомат

Набор из пяти объектов $(A, X, B, \circ, *)$, где A, X, B — непустые множества, $\circ$ — функция переходов, $*$ — функция выходов.

Автомат минимальный

Автомат, не имеющий различных эквивалентных состояний.

Автомат приведенный

Автомат, не имеющий различных эквивалентных состояний.

Аналитический

Способ задания автомата непосредственным определением функций $\circ$, $*$.

Гомоморфизм полугрупп

Отображение $f : A \to B$ называется гомоморфизмом полугруппы A в полугруппу B, если для любых $a, b \in A$ $f(ab) = f(a)f(b)$.

Гомоморфизм полугрупп естественный

Отображение $\chi : A \to A/\theta$ полугрупп, при котором $\chi(a) = a\theta$, называется естественным гомоморфизмом.

Граф ориентированный

Это пара множеств (V, E), где V — множество вершин, E — множество ребер, и каждому ребру $e \in E$ соответствует упорядоченная пара вершин $(v, u), v, u \in E$.

Графический

Графический способ задания автомата (с помощью ориентированного графа) состоит в следующем. Вершины — это состояния автомата. Из вершины a_1 выходит ребро с концом в a_2, если существует $x \in X$ такой, что $a_2 = a_1 \circ x$. Это ребро обозначается парой (x, b), где b — выходной символ, равный $b = a_1 * x$.

Длина слова

Длиной слова $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \in X^*$ называется число n. $|t|$ — так обозначается длина t. По определению длина пустого слова равна нулю.

Единица полугруппы

Элемент e полугруппы A называется *единицей*, если для любого $x \in A$ $ex = xe = x$.

Закон ассоциативности

Для любых $a, b, c \in A$ $(ab)c = a(bc)$ — закон ассоциативности.

Закон рефлексивности

Для любого $a \in A$ $a\theta a$ — закон рефлексивности.

Закон симметричности

Для любых $a, b \in A$, если $a\theta b$, то $b\theta a$ — закон симметричности.

Закон транзитиности

Для всех $a, b, c \in A$, если $a\theta b$ и $b\theta c$, то $a\theta c$ — закон транзитивности.

Изоморфизм полугрупп

Взаимно однозначный гомоморфизм.

Класс смежный

θ — эквивалентность на A, $a \in A$. Тогда множество $\{b \in A \mid b\theta a\}$ называется смежным классом A по θ, содержащим элемент a.

Конгруэнция на автомате

Конгруэнцией на автомате $\mathbb{A} = (A, X, B)$ называется тройка эквивалентностей $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$, удовлетворяющая условию: для любых $a_1, a_2 \in A$, $x_1, x_2 \in X$

если $a_1\rho_1 a_2$, $x_1\rho_2 x_2$, то $(a_1 \circ x_1)\rho_1(a_2 \circ x_2)\&(a_1 * x_1)\rho_3(a_2 * x_2)$.

Конгруэнция на полугруппе

Эквивалентность θ на полугруппе A называется конгруэнцией, если для любых $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ справедливо следующее:

если $a_1\theta b_1$ и $a_2\theta b_2$, то $a_1a_2\theta b_1b_2$.

Конгруэнция, порожденная s

Пусть $\mathbb{A} = (A, X, B)$ — данный автомат. Возьмем произвольную тройку $s = (s_1, s_2, s_3)$ множеств $(s_1 \subseteq A, s_2 \subseteq X, s_3 \subseteq B)$. Пересечение всех конгруэнций $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ на $\mathbb{A}$ таких, что $s_1 \subseteq \rho_1, s_2 \subseteq \rho_2, s_3 \subseteq \rho_3$, называется конгруэнцией, порожденной s. Отметим, что множества s_1, s_2, s_3 могут быть пустыми.

Конгруэнция ядерная

$\ker f = \{(a_1, a_2) \mid f(a_1) = f(a_2)\}$.

Метод упрощения программ

Он состоит в следующем: по компьютерной программе строим автомат, затем находим приведенный автомат, пишем программу, ему соответствующую. Эта программа эквивалентна предыдущей и более простая.

Множество входных символов

Это множество X из автомата $(A, X, B, \circ, *)$.

Множество выходных символов

Это множество B из автомата $(A, X, B, \circ, *)$.

Множество состояний автомата

Это множество A из автомата $(A, X, B, \circ, *)$.

Операция бинарная

Любое отображение $f : A \times A \to A$.

Отношение бинарное

Любое подмножество $\theta \subseteq A \times A$.

Отношение равенства

$\varepsilon_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ — отношение равенства.

Отношение эквивалентности на множестве

Бинарное отношение на A, удовлетворяющее законам рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Отображение

Закон, который каждому элементу a множества A сопоставляет некоторый элемент (однозначно определенный) $f(a)$ из B, называется отображением множества A в множество B.

Отображение "на"

Отображение $f : A \to B$ назавается отображением на множество B, если каждый элемент из B имеет прообраз.

Отображение взаимно однозначное

Отображение $f : A \to B$ назавается взаимно однозначным, если оно "на" и различным элементам из A сопоставлены разные элементы из B

Полугруппа

Непустое множество с заданной на нем бинарной операцией $\cdot$, удовлетворяющей закону ассоциативности.

Полугруппа свободная

Множество слов с операцией приписывания слова.

Полугруппа свободная с единицей

Это полугруппа, получаемая добавлением к свободной нового символа, который интерпретируется как пустое слово.

Полугруппы изоморфные

Полугруппы A и B изоморфные, если существует изоморфизм A на B.

Преобразование множества A

Любое отображение A в себя.

Произведение декартово

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$ — декартово произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Слово

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — любое множество (называемое алфавитом). Полагаем:

1) если $x \in X$, то x — слово,

2) если t, f — слова, то tf — слово (tf получается приписыванием к слову t слова f),

3) всякое слово может быть получено по правилам 1), 2).

Состояния m-эквивалентные

Состояния a, a' называются m-эквивалентными, если $g^*(a, w) = g^*(a', w)$ для всех входных последовательностей w длины, не превышающей m.

Способы задания автомата

У нас: аналитический, табличный, графический.

Табличный

Способ задания автомата при помощи таблиц входа и выхода.

Теорема о гомоморфизмах

Пусть $f : A \overset{\text{на}}{\to} B$ — гомомрфизм полугруппы A на полугруппу B. Тогда $B \cong A/\ker f$.

Теорема о фактор-полугруппе

Если θ — конгруэнция на полугруппе A, то A/θ — полугруппа.

Теорема о Хаффмана-Мили

Для эквивалентности двух состояний a_1 и a_2 автомата с n состояниями ($n > 0$) достаточно, чтобы $g^*(a_1, w) = g^*(a_2, w)$ для всех входных последовательностей w длины, не превышающей $n - 1$.

Фактор-автомат

Это автомат вида $(A/\rho_1, X/\rho_2, B/\rho_3)$.

Фактор-множество

$A/\theta = \{a\theta \mid a \in A\}$ — множество различных смежных классов A по эквивалентности θ.

Фактор-полугруппа

$A/\theta = \{a\theta \mid a \in A\}$ — множество различных смежных классов полугруппы A по эквивалентности θ с операцией: $a\theta \cdot b\theta = ab\theta$.

Функция выходов

$* : A \times X \to B$ — функция выходов.

Функция переходов

$\circ : A \times X \to A$ — функция переходов.

Функция f^*

Пусть $\mathbb{A} = (A, X, B, \circ, *)$ — автомат. Через $f^* : A \times F^0(X) \to A$ обозначается отображение, обладающее следующими свойствами:
$f^*(a, \lambda) = a$, $f^*(a, wx) = f^*(a, w) \circ x$,
для всех $a \in A$, $x \in X$, $w \in X^*$.

Функция g^*

Пусть $\mathbb{A} = (A, X, B, \circ, *)$ — автомат. Через $g^* : A \times X^* \to B^*$ обозначается отображение, обладающее следующими свойствами:
$g^*(a, \lambda) = \lambda$, $g^*(a, wx) = g^*(a, w)(f^*(a, w) * x)$
для всех $a \in A$, $x \in X$, $w \in X^*$.

Эквивалентность состояний

Состояния a_1 и a_2 называются эквивалентными, если $g^*(a_1, w) = g^*(a_2, w)$ для каждого $w \in X^*$.