Теорема (о гомоморфизмах). Пусть $f : A \overset{\text{на}}{\to} B$ — гомомрфизм полугруппы A на полугруппу B. Тогда $B \cong A/\ker f$.

Доказательство. Обозначение: $\overline{a} = a \ker f$. Пусть $\chi : A \to A/\theta$ — естественный гомоморфизм. Напомним, что $\chi(a) = \overline{a}$. Полагаем: $\varphi(\overline{a}) = f(a)$. Наша цель — показать, что φ — искомый изоморфизм.

Сначала проверим корректность определения φ. Для этого предположим, что $\overline{a}_1 = \overline{a}_2$. Тогда $a_1 \ker a_2$, значит, $f(a_1) = f(a_2)$, т.е. $\varphi(\overline{a}_1) = \varphi(\overline{a}_2)$.

Покажем, что φ — гомоморфизм. В самом деле,

$\varphi(\overline{a}_1\overline{a}_2) = \varphi(\overline{a_1a_2}) = f(a_1a_2) = f(a_1)f(a_2) = \varphi(\overline{a}_1)\varphi(\overline{a}_2)$,

т.е. φ — гомоморфизм.

Пусть $b \in B$. Тогда найдется $a \in A$, для которого $f(a) = b$. Отсюда $\varphi(\overline{a}) = f(a) = b$. Значит, φ — отображение "на".

Пусть $\overline{a}_1 \neq \overline{a}_2$. Предположим, что $\varphi(\overline{a}_1) = \varphi(\overline{a}_2)$. Тогда $f(a_1) = f(a_2)$, т.е. $a_1 \ker a_2$. Отсюда $\overline{a}_1 = \overline{a}_2$. Полученное противоречие означает, что φ отображает разные элементы в разные. Итак, φ — изоморфизм. Теорема доказана.

Отметим, что при применении этой теоремы часто используется определение изоморфизма φ из ее доказательства.