Теорема **1** *(Хаффман, Мили) Для эквивалентности двух состояний* a_1 *и* a_2 *автомата с* n *состояниями* $(n > 0)$ *достаточно, чтобы* $g^*(a_1, w) = g^*(a_2, w)$ *для всех входных последовательностей* w *длины, не превышающей* $n - 1$.

Доказательство. Из определения следует, что если состояния $(m + 1)$-эквивалентные, то они m-эквивалентные. Значит, смежные классы из K_{m+1} получаются путем разбиения смежных классов из K_m. Отсюда $|K_m| \leq |K_{m+1}|$. Возникает цепочка

$$|K_1| \leq |K_2| \leq |K_3| \leq \ldots \leq n. \tag{1}$$

Отсюда существует i такое, что $|K_i| = |K_{i+1}|$. Возьмем наименьшее такое i. Поскольку смежные классы из K_{i+1} получаются путем разбиения смежных классов из K_i, то $K_i = K_{i+1}$.

Покажем теперь, что из $K_i = K_{i+1}$ следует $K_i = K_{i+2}$. Для этого зафиксируем произвольное состояние a. Надо доказать, что $a\theta_{i+2} = a\theta_i$. Это будет означать, что K_i и K_{i+2} состоят из одних и тех же классов.

Берем любой элемент $a' \in a\theta_{i+2}$. Элементы, находящиеся в одном смежном классе по θ_{i+2}, являются θ_{i+2}-эквивалентными. Ранее было уже отмечено, что если элементы $(m + 1)$-эквивалентные, то они m-эквивалентные. Отсюда a, a' — θ_{i+1}-эквивалентные, значит, a, a' — θ_i-эквивалентные. Получаем, что $a' \in a\theta_i$. Итак, $a\theta_{i+2} \subseteq a\theta_i$. Докажем теперь обратное включение.

Возьмем произвольный элемент $a' \in a\theta_i$. Поскольку a', a содержатся в одном смежном классе по θ_i, то они i-эквивалентны, в частности, они 1-эквивалентны, т.е. $a * x = a' * x$ при $x \in X$.

Из равенства $K_i = K_{i+1}$ следует, что они $(i+1)$-эквивалентны, т.е. $g^*(a, xw) = g^*(a', xw)$ для любого слова xw длины $i + 1$ $(x \in X, |w| = i)$.

1) Покажем, что $a \circ x, a' \circ x$ — $(i + 1)$-эквивалентные. Снова берем любое слово w длины i. Будем многократно использовать теорему **??**. Имеем:

$$g^*(a, xw) = g^*(a', xw),$$
$$g^*(a, xw) = g^*(a, x)g^*(a \circ x, w) = (a * x)g^*(a \circ x, w),$$
$$g^*(a', xw) = g^*(a', x)g^*(a' \circ x, w) = (a' * x)g^*(a' \circ x, w).$$

Отсюда $g^*(a \circ x, w) = g^*(a' \circ x, w)$. Это означает, что $a \circ x, a' \circ x$ — i-эквивалентны. Но $K_i = K_{i+1}$, следовательно, $a \circ x, a' \circ x$ — $(i + 1)$-эквивалентные.

2) Покажем, что a, a' — $(i+2)$-эквивалентные. Возьмем любое слово xw длины $i + 2$ $(x \in X, |w| = i + 1)$. Имеем:

$g^*(a, xw) = (a * x)g^*(a \circ x, w)$,

$g^*(a', xw) = (a' * x)g^*(a' \circ x, w)$.

Но $a \circ x, a' \circ x$ — $(i+1)$-эквивалентные, следовательно, $g^*(a \circ x, w) = g^*(a' \circ x, w)$. Было отмечено, что $a * x = a' * x$. Отсюда $g^*(a, xw) = g^*(a', xw)$. Это означает, что a, a' — $(i+2)$-эквивалентные, т.е. $a' \in a\theta_{i+2}$. Мы доказали, что $a\theta_i \subseteq a\theta_{i+2}$. Отсюда $a\theta_i = a\theta_{i+2}$. Таким образом, $K_i = K_{i+2}$.

Применяя несколько раз полученное, видим, что

из $K_i = K_{i+1}$ следует $K_i = K_{i+m}$ для любого $m \geq 1$.

Покажем теперь, что если $K_j \neq K_{j+1}$, то $|K_j| \geq j + 1$.

Пусть сначала $j = 1$. Если $|K_1| = 1$, то все состояния эквивалентны, следовательно, $K_1 = K_2$, что не так. Имеем:

$1 < |K_1| < |K_2| < |K_3| < |K_j| < \ldots |K_i| = |K_{i+1}| = \ldots \leq n$.

Отсюда $|K_j| \geq j + 1$.

Получили $i + 1 \leq |K_i| \leq n$, значит, $i \leq n - 1$.

Из равенств $|K_{n-1}| = |K_n| = |K_{n+1}| = \ldots$ следует, что $K_{n-1} = K_n = K_{n+1} = \ldots$, т.е. если состояния $(n-1)$-эквивалентны, то они m-эквивалентны для любого $m \geq n - 1$, т.е. эквивалентные. Теорема доказана.